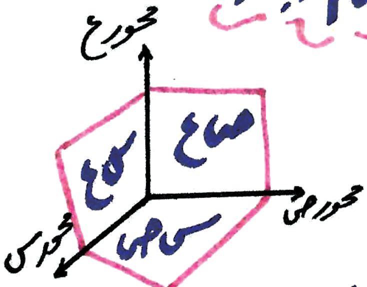
الوحدة الأولى : النظام الإحداثي المتعامد ثلاثي الأبعاد



مستويات الإحداثيات

المستوى الإحداثي س ص

يحوي جميع نقط الفراغ التي إحداثياتها (س ، ص ، ٠)
وتكون معادلته ع = ٠

المستوى الإحداثي س ع

يحوي جميع نقط الفراغ التي إحداثياتها (س ، ٠ ، ع)
وتكون معادلته ص = ٠

المستوى الإحداثي ص ع

يحوي جميع نقط الفراغ التي إحداثياتها (٠ ، ص ، ع)
وتكون معادلته س = ٠

محاور الإحداثيات

(١) النقطة (س ، ٠ ، ٠) تقع على محور س
* معادلة محور س في الفراغ
ص = ٠ ، ع = ٠

(٢) النقطة (٠ ، ص ، ٠) تقع على محور ص
* معادلة محور ص في الفراغ
س = ٠ ، ع = ٠

(٣) النقطة (٠ ، ٠ ، ع) تقع على محور ع
* معادلة محور ع في الفراغ
س = ٠ ، ص = ٠

* **بُعد النقطة (أ ، ب ، جـ)**
  - عن محور س $\sqrt{\text{ب}^2 + \text{جـ}^2}$
  - عن محور ص $\sqrt{\text{أ}^2 + \text{جـ}^2}$
  - عن محور ع $\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}$

* **بُعد النقطة أ (س ، ص ، ع)**
  - عن المستوى ص ع $|\text{س}|$
  - عن المستوى س ع $|\text{ص}|$
  - عن المستوى س ص $|\text{ع}|$

* **بُعد النقطة أ (أ$_{\text{س}}$ ، أ$_{\text{ص}}$ ، أ$_{\text{ع}}$)** عن نقطة الأصل $= \sqrt{\text{أ}_{\text{س}}^2 + \text{أ}_{\text{ص}}^2 + \text{أ}_{\text{ع}}^2}$

حيث و (٠ ، ٠ ، ٠) نقطة الأصل

* البعد بين نقطتين في الفراغ

خد بالك

* البعد بين النقطتين $P(س_1، ص_1)$ ، $ب(س_2، ص_2)$ في نظام ثنائي الابعاد

$$= \sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$$

* في نظام ثلاثي الابعاد، النقطتين $P(س_1، ص_1، ع_1)$ ، $ب(س_2، ص_2، ع_2)$

$$= \sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2 + (ع_2 - ع_1)^2}$$

* احداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيم *

اذا كانت جـ منتصف $\overline{Pب}$ فإن احداثي جـ $= \left(\frac{س_1 + س_2}{2}، \frac{ص_1 + ص_2}{2}، \frac{ع_1 + ع_2}{2}\right)$

* أحداثي نقطة تقاطع متوسطات $\triangle$ م *

$$م = \left(\frac{س_1 + س_2 + س_3}{3}، \frac{ص_1 + ص_2 + ص_3}{3}، \frac{ع_1 + ع_2 + ع_3}{3}\right)$$

ملحوظة هامة

في $\triangle$ Pب جـ اذا كان

$(Pب)^2 = (Pجـ)^2 + (بجـ)^2$ فإن $\triangle$ قائم الزاوية في جـ

$(Pب)^2 > (Pجـ)^2 + (بجـ)^2$ $\triangle$ منفرج الزاوية في جـ

$(Pب)^2 < (Pجـ)^2 + (بجـ)^2$ $\triangle$ حاد الزاوية في جـ

(جـ زاوية حادة)

" معادلة الكرة "

* الصورة القياسية لمعادلة الكرة :

أ (س، ص، ع) نقطة تقع على الكرة ، مركز الكرة (ل، ك، ن)

$(س - ل)^2 + (ص - ك)^2 + (ع - ن)^2 = نق^2$

* المعادلة العامة للكرة :

$س^2 + ص^2 + ع^2 + 2 ل س + 2 ك ص + 2 ن ع + د = صفر$

* مركز الكرة :

($-\frac{1}{2}$ معامل س ، $-\frac{1}{2}$ معامل ص ، $-\frac{1}{2}$ معامل ع)

$= (-ل ، -ك ، -ن)$

حيث : $ل^2 + ك^2 + ن^2 > د \Leftarrow نق = \sqrt{ل^2 + ك^2 + ن^2 - د}$

تذكر

← مساحة سطح الكرة = $4 \pi نق^2$

← حجم الكرة = $\frac{4}{3} \pi نق^3$

* معادلة الكرة بمعلومية طرفي قطر فيها *

اذا كان $(س_1 ، ص_1 ، ع_1)$ ، $(س_2 ، ص_2 ، ع_2)$ هما طرفان قطر من الكرة

فإن معادلتها تكون على الصورة :

$(س - س_1)(س - س_2) + (ص - ص_1)(ص - ص_2) + (ع - ع_1)(ع - ع_2) = 0$

* الكرة التي مركزها نقطة الأصل والنقطة (أ، ب، حـ) تقع عليها *

طول نصف قطرها نق $= \sqrt{أ^2 + ب^2 + حـ^2}$

معادلتها من الصورة القياسية

$س^2 + ص^2 + ع^2 = نق^2$

* الكرة التي مركزها (أ، ب، جـ) وتمس مستويات الإحداثيات *

- إذا كانت تمس المستوى **س ص**
  نق = |جـ|
  مركزها يقع على محور ع

- إذا كانت تمس المستوى **س ع**
  نق = |ب|
  مركزها يقع على محور ص

- إذا كانت تمس المستوى **ص ع**
  نق = |أ|
  مركزها يقع على محور س

* الكرة التي تمس المستويات الإحداثيات الموجبة/السالبة وطول نصف قطرها نق *

يكون مركزها (± نق، ± نق، ± نق)

خد بالك

لكي تحصل على أصغر كرة تمر بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة

(١) النقط تمثل △ متساوي الأضلاع رؤوسه (أ، ٠، ٠) (٠، أ، ٠) (٠، ٠، أ)

(٢) المركز = $(\frac{أ}{٣}، \frac{أ}{٣}، \frac{أ}{٣})$ وطول ضلع المثلث = |أ| $\sqrt{٢}$

طول نصف قطر الدائرة = $\frac{|أ|\sqrt{٢}}{٢ جا ٦٠} = \frac{|أ|\sqrt{٦}}{٣}$

* إذا كانت م، ن كرتين طول نصف قطريهما نق١، نق٢ على الترتيب (نق١ > نق٢)

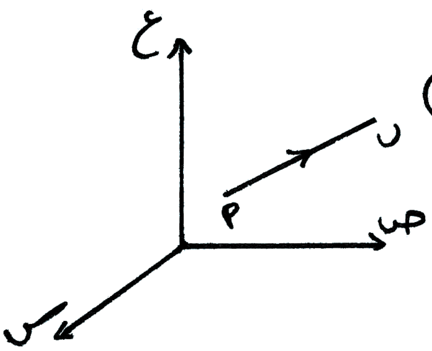
موضع الكرتين

(١) متباعدتين من الخارج
(٢) متماستين من الخارج
(٣) متماستين من الداخل
(٤) متقاطعتان
(٥) متباعدتان من الداخل
(٦) متحدتا المركز

طول خط المركزين

م ن > نق١ + نق٢
م ن = نق١ + نق٢
م ن = نق١ − نق٢
نق١ − نق٢ < م ن < نق١ + نق٢
م ن < نق١ − نق٢
م ن = صفر

المتجهات في الفراغ



* القطعة المستقيمة الموجهة *

تتحدد بمعلومية:
- نقطة بداية أ
- نقطة نهاية ب
- الاتجاه من البداية إلى النهاية

أ ⟵ ب

* متجه الموضع في الفراغ *

قطعة مستقيمة بدايتها نقطة الأصل ونهايتها أ (أس ، أص ، أع)

يرمز لها $\overrightarrow{\text{أ}}$ (أس ، أص ، أع)

- أس: مركبة $\overrightarrow{\text{أ}}$ في اتجاه محور س
- أص: مركبة $\overrightarrow{\text{أ}}$ في اتجاه محور ص
- أع: مركبة $\overrightarrow{\text{أ}}$ في اتجاه محور ع

* معيار المتجه *

هو طول القطعة المستقيمة الموجهة التي تمثل المتجه

إذا كان أ (أس ، أص ، أع)

∴ $\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = \sqrt{\text{أس}^2 + \text{أص}^2 + \text{أع}^2}$

* جمع متجهين في الفراغ *

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (أس ، أص ، أع) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (بس ، بص ، بع)

∴ $\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}$ = (أس + بس ، أص + بص ، أع + بع)

بعض الخواص

(١) $\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{أ}}$

(٢) المتجه و (٠ ، ٠ ، ٠) يسمى بالمتجه الصفري (المحايد الجمعي)

(٣) المعكوس الجمعي أ + (−أ) = $\overrightarrow{\text{و}}$

(٤) $\|\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}\| \leq \|\overrightarrow{\text{أ}}\| + \|\overrightarrow{\text{ب}}\|$

* ضرب متجه في عدد حقيقي *

اذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (أس ، أص ، أع) فإن ك $\overrightarrow{أ}$ = ك (أس ، أص ، أع)

= (ك أس ، ك أص ، ك أع)

بعض الخواص

(١) ← ك ($\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$) = ك $\overrightarrow{أ}$ + ك $\overrightarrow{ب}$

(٢) ← (ك + ل) $\overrightarrow{أ}$ = ك $\overrightarrow{أ}$ + ل $\overrightarrow{أ}$

(٣) ← ك (ل $\overrightarrow{أ}$) = (ك ل) $\overrightarrow{أ}$ = ل (ك $\overrightarrow{أ}$)

خد بالك

اذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهين في الفراغ م عدد حقيقي ≠ ٠ .

$\|\overrightarrow{ب}\|$ = $\|$م $\overrightarrow{أ}\|$ ⟸ $\|\overrightarrow{ب}\|$ = $\|$م$\|$ $\|\overrightarrow{أ}\|$

---

* تساوي المتجهات في الفراغ *

اذا كان أ (أس ، أص ، أع) ، ب (بس ، بص ، بع) وكان أ = ب

∴ أس = بس ، أص = بص ، أع = بع

متجه الوحدة هو المتجه الذي معياره وحدة الأطوال (واحد صحيح)

متجهات الوحدة الأساسية

متجه الوحدة الأساسي $\overrightarrow{س}$	متجه الوحدة الأساسي $\overrightarrow{ص}$	متجه الوحدة الأساسي $\overrightarrow{ع}$
(١ ، ٠ ، ٠)	(٠ ، ١ ، ٠)	(٠ ، ٠ ، ١)
$\|\overrightarrow{س}\|$ = ١	$\|\overrightarrow{ص}\|$ = ١	$\|\overrightarrow{ع}\|$ = ١

* متجه الوحدة في اتجاه متجه معلوم *

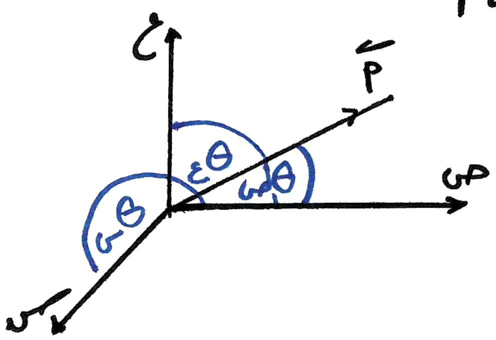
اذا كان المتجه $\overrightarrow{P}$ (Pس ، Pص ، Pع) فإن متجه الوحدة في اتجاه $\overrightarrow{P}$ يرمز

$$* \quad \overrightarrow{ن}_P = \frac{\overrightarrow{P}}{\|\overrightarrow{P}\|} = \frac{\text{المتجه}}{\text{معياره}} \quad *$$

خد بالك ← $\overrightarrow{P}$ن = $\overrightarrow{ن}$ - $\overrightarrow{P}$

* زوايا الاتجاه وجيوب تمام الاتجاه لمتجه في الفراغ *

(١) ($\theta_س$ ، $\theta_ص$ ، $\theta_ع$) هي زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{P}$



(٢) $جتا \theta_س = \frac{P_س}{\|P\|}$

$جتا \theta_ص = \frac{P_ص}{\|P\|}$ ، $جتا \theta_ع = \frac{P_ع}{\|P\|}$

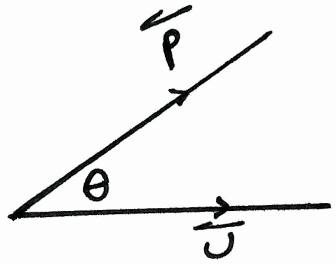
(٣) $\overrightarrow{P} = \|\overrightarrow{P}\| جتا \theta_س \overrightarrow{س} + \|\overrightarrow{P}\| جتا \theta_ص \overrightarrow{ص} + \|\overrightarrow{P}\| جتا \theta_ع \overrightarrow{ع}$

← الصورة الجبرية للمتجه $\overrightarrow{P}$

* خد بالك قانون مهم :

$$جتا^2 \theta_س + جتا^2 \theta_ص + جتا^2 \theta_ع = 1$$

* الضرب القياسي لمتجهين *



(١) $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = \|\overrightarrow{أ}\| \, \|\overrightarrow{ب}\|$ جتا θ

θ الزاوية الصغرى المحصورة بين سهمين اما خارجين او داخلين لنقطة واحدة

(٢) جتا $\theta = \dfrac{\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}}{\|\overrightarrow{أ}\| \, \|\overrightarrow{ب}\|}$ $\quad ٠ \leq \theta \leq ١٨٠^\circ$

(٣) $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}$

- **موجبة**: اذا كانت θ زاوية حادة
- **صفر**: $\theta = ٩٠^\circ$
- **سالبة**: اذا كانت θ زاوية منفرجة

(٤)

- **جتا $\theta = 1$**: فان المتجهين متوازيان ومن نفس الاتجاه
- **جتا $\theta = -1$**: فان المتجهين متوازيان ومن اتجاهين متضادين
- **جتا θ = صفر**: فان المتجهين متعامدين $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}$ = صفر

(٥) خواص الضرب القياسي

- $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{ب} \cdot \overrightarrow{أ}$
- $\overrightarrow{أ} \cdot (\overrightarrow{ب} + \overrightarrow{ج}) = (\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}) + (\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ج})$
- $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{أ} = \|\overrightarrow{أ}\| = أ^2$
- اذا كان ك عدد حقيقي
  $(ك\,\overrightarrow{أ}) \cdot \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{أ} \cdot (ك\,\overrightarrow{ب})$
  $= ك\,(\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب})$

* س، ص، ع متجهات الوحدة لمجموعة يمينية

$\hat{س} \cdot \hat{س} = \hat{ص} \cdot \hat{ص} = \hat{ع} \cdot \hat{ع} = 1$

$\hat{س} \cdot \hat{ص} = \hat{ص} \cdot \hat{ع} = \hat{ع} \cdot \hat{س} = صفر$

* مسقط متجه في اتجاه متجه آخر "المركبة الجبرية"

مركبة $\vec{أ}$ في اتجاه $\vec{ب}$ يرمز لها بالرمز $أ_ب$

$$أ_ب = \|أ\| \text{ جتا هـ} = \frac{\vec{أ} \cdot \vec{ب}}{\|\vec{ب}\|}$$

الضرب القياسي لمتجهين

ثنائي $\vec{أ}$ $(أ_س ، أ_ص)$
$\vec{ب}$ $(ب_س ، ب_ص)$

$\vec{أ} \cdot \vec{ب} = أ_س ب_س + أ_ص ب_ص$

ثلاثي $\vec{أ}$ $(أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$
$\vec{ب}$ $(ب_س ، ب_ص ، ب_ع)$

$\vec{أ} \cdot \vec{ب} = أ_س ب_س + أ_ص ب_ص + أ_ع ب_ع$

* لإيجاد الشغل المبذول *

$ش = \vec{ق} \cdot \vec{ف} = \|\vec{ق}\| \ \|\vec{ف}\| \text{ جتا هـ}$

"حيث $\vec{ق}$ القوة المؤثرة على الجسم ، $\vec{ف}$ ازاحة الجسم"

وحدات قياس الشغل نيوتن . متر = جول
داين . سم = ارج

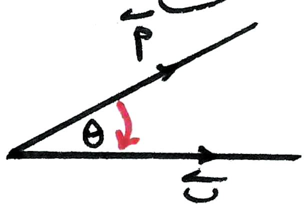
ملحوظة

المركبة الاتجاهية لـ $\overrightarrow{\text{أ}}$ في اتجاه $\overrightarrow{\text{ب}}$

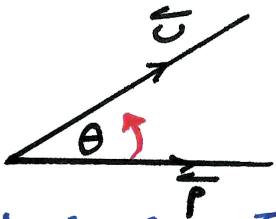
= (المركبة الجبرية $\overrightarrow{\text{أ}}$ في اتجاه $\overrightarrow{\text{ب}}$) × (متجه الوحدة في اتجاه ب)

$$= \frac{\overrightarrow{\text{أ}}\cdot\overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{ب}}\|}\left(\frac{\overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{ب}}\|}\right) = \left(\frac{\overrightarrow{\text{أ}}\cdot\overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{ب}}\|}\right)\overrightarrow{\text{ب}}$$

الضرب الاتجاهي والثلاثي القياسي



مع اتجاه عقارب الساعة



في عكس اتجاه عقارب الساعة

(١) $\overrightarrow{\text{أ}}\times\overrightarrow{\text{ب}} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\|\,\|\overrightarrow{\text{ب}}\|\,\text{جاهـ}\;\hat{\text{ى}}$

حيث ى متجه وحدة عمودي على $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$

(٢)

$\|\overrightarrow{\text{أ}}\times\overrightarrow{\text{ب}}\| = \|\overrightarrow{\text{أ}}\|\,\|\overrightarrow{\text{ب}}\|\,|\text{جاهـ}|$

متجه الوحدة العمودي على $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$

$$\text{ى} = \frac{\overrightarrow{\text{أ}}\times\overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{أ}}\times\overrightarrow{\text{ب}}\|} = \frac{\text{حاصل الضرب القياسي}}{\text{معياره}}$$

$$\text{جاهـ} = \frac{\|\overrightarrow{\text{أ}}\times\overrightarrow{\text{ب}}\|}{\|\overrightarrow{\text{أ}}\|\,\|\overrightarrow{\text{ب}}\|}$$

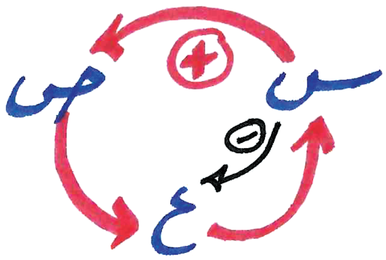
* خواص الضرب الاتجاهي *

- $\overrightarrow{\text{أ}}\times\overrightarrow{\text{ب}} = -\overrightarrow{\text{ب}}\times\overrightarrow{\text{أ}}$
- $\overrightarrow{\text{أ}}\times(\overrightarrow{\text{ب}}+\overrightarrow{\text{جـ}}) = \overrightarrow{\text{أ}}\times\overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{أ}}\times\overrightarrow{\text{جـ}}$
- $(\text{ك}\,\overrightarrow{\text{أ}})\times\overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{أ}}\times(\text{ك}\,\overrightarrow{\text{ب}}) = \text{ك}\,(\overrightarrow{\text{أ}}\times\overrightarrow{\text{ب}})$ حيث ك ∈ ح
- إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} \parallel \overrightarrow{\text{ب}}$ فإن $\overrightarrow{\text{أ}}\times\overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{و}}$ وبذلك $\overrightarrow{\text{أ}}\times\overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{و}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}\times\overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{و}}$

* المجموعة اليمينية لمتجهات الوحدة *

* $\overrightarrow{\text{س}} \times \overrightarrow{\text{ص}} = \overrightarrow{\text{ع}}$
* $\overrightarrow{\text{ص}} \times \overrightarrow{\text{ع}} = \overrightarrow{\text{س}}$
* $\overrightarrow{\text{ع}} \times \overrightarrow{\text{س}} = \overrightarrow{\text{ص}}$

* $\overrightarrow{\text{ص}} \times \overrightarrow{\text{س}} = -\overrightarrow{\text{ع}}$
* $\overrightarrow{\text{ع}} \times \overrightarrow{\text{ص}} = -\overrightarrow{\text{س}}$
* $\overrightarrow{\text{س}} \times \overrightarrow{\text{ع}} = -\overrightarrow{\text{ص}}$



" $\overrightarrow{\text{س}} \times \overrightarrow{\text{س}} = \overrightarrow{\text{ص}} \times \overrightarrow{\text{ص}} = \overrightarrow{\text{ع}} \times \overrightarrow{\text{ع}} = \overrightarrow{\text{و}}$ "

* الضرب الاتجاهي لمتجهين في الصورة الكارتيزية *

$\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{\text{س}}، \text{أ}_{\text{ص}}، \text{أ}_{\text{ع}})$

$\overrightarrow{\text{ب}} = (\text{ب}_{\text{س}}، \text{ب}_{\text{ص}}، \text{ب}_{\text{ع}})$

$$\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ \text{أ}_{\text{س}} & \text{أ}_{\text{ص}} & \text{أ}_{\text{ع}} \\ \text{ب}_{\text{س}} & \text{ب}_{\text{ص}} & \text{ب}_{\text{ع}} \end{vmatrix}$$

اذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ يقعان في المستوى الاحداثي س ص

$$\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ \text{أ}_{\text{س}} & \text{أ}_{\text{ص}} & 0 \\ \text{ب}_{\text{س}} & \text{ب}_{\text{ص}} & 0 \end{vmatrix}$$

* توازي متجهين *

$\overrightarrow{\text{أ}} \,//\, \overrightarrow{\text{ب}}$

$\dfrac{\text{أ}_{\text{س}}}{\text{ب}_{\text{س}}} = \dfrac{\text{أ}_{\text{ص}}}{\text{ب}_{\text{ص}}} = \dfrac{\text{أ}_{\text{ع}}}{\text{ب}_{\text{ع}}} = \text{ك}$

حيث (ك اى ثابت ≠ ٠)

$\overrightarrow{\text{أ}} \,//\, \overrightarrow{\text{ب}}$

$\therefore \overrightarrow{\text{أ}} = \text{ك}\,\overrightarrow{\text{ب}}$

ك عدد موجب: $\overrightarrow{\text{أ}} \,//\, \overrightarrow{\text{ب}}$ وفي نفس الاتجاه
الزاوية بينهما (صفر)

ك عدد سالب: $\overrightarrow{\text{أ}} \,//\, \overrightarrow{\text{ب}}$ وفي عكس الاتجاه
الزاوية بينهما (180°)

$\overrightarrow{\text{أ}} \,//\, \overrightarrow{\text{ب}}$

$\therefore \overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{و}}$

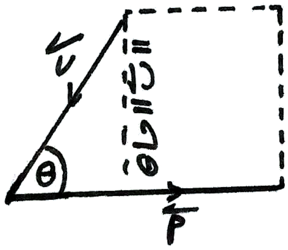
" والعكس صحيح "

خد بالك: اذا كانت أ ، ب ، ج ثلاث نقط في فراغ ثلاثي الأبعاد وكان $\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{ب ج}} = \vec{0}$ ← $\overrightarrow{\text{أب}} \parallel \overrightarrow{\text{ب ج}}$

∴ النقط أ، ب، ج على استقامة واحدة

المعنى الهندسي لمعيار الضرب الاتجاهي لمتجهين

$\|\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}}\| = \|\vec{\text{أ}}\| \, \|\vec{\text{ب}}\| \, \text{جا}\,\theta$



* مساحة متوازي الأضلاع

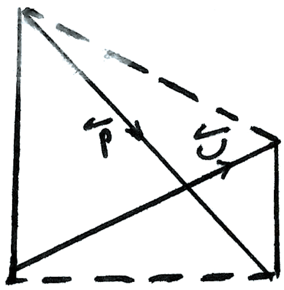
$= \|\vec{\text{أ}}\| \, \|\vec{\text{ب}}\| \, \text{جا}\,\theta$

$= \|\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}}\|$

* مساحة المثلث

$= \frac{1}{2} \times \|\vec{\text{أ}}\| \times \|\vec{\text{ب}}\| \, \text{جا}\,\theta$

$= \frac{1}{2} \times \|\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}}\|$



* مساحة الشكل الرباعي

$= \frac{1}{2} \times \|\vec{\text{أ}}\| \times \|\vec{\text{ب}}\| \, \text{جا}\,\theta$

$= \frac{1}{2} \|\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}}\|$

ملحوظة: شرط ان يكون $\vec{\text{أ}}$ ، $\vec{\text{ب}}$ قطراه فيه

الضرب القياسي الثلاثي

$$\vec{\text{أ}} \cdot \vec{\text{ب}} \times \vec{\text{ج}} = \begin{vmatrix} \text{أس} & \text{أص} & \text{أع} \\ \text{بس} & \text{بص} & \text{بع} \\ \text{جس} & \text{جص} & \text{جع} \end{vmatrix}$$

خواص الضرب الثلاثي القياسي

$\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{ج}$
$= \vec{ب} \cdot \vec{ج} \times \vec{أ}$
$= \vec{ج} \cdot \vec{أ} \times \vec{ب}$

$\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{ج}$
$= \vec{أ} \times \vec{ب} \cdot \vec{ج}$

أما إذا كانت
$\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ ، $\vec{ج}$
في مستوى واحد
$\therefore \vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{ج} =$ صفر
$\therefore$ أ ، ب ، ج ، د تقع في مستوى واحد

ملحوظة

$\because \overrightarrow{أب} \cdot \overrightarrow{أج} \times \overrightarrow{أد} =$ صفر

* المعنى الهندسي لحاصل الضرب الثلاثي القياسي *

حجم متوازي السطوح $= |\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{ج}|$